**1.** Найдите все тройки действительных чисел $(x, y, z)$, удовлетворяющих системе уравнений:

$$\begin{cases} x^3y^3z^3 = 1; \\ xy^5z^3 = 2; \\ xy^3z^5 = 3. \end{cases}$$

*Ответ.* $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right)$.

*Решение.* Рассмотрим любое из трёх уравнений. Все три переменные в нём стоят в нечётных степенях. Это значит, что либо все три числа $x, y, z$ положительные, либо среди них два отрицательных и одно положительное. Причём при наличии отрицательных если у них обоих сменить знак, мы получим положительное решение.

Отсюда следует, что достаточно найти все положительные решения. Меняя у них знаки, получим и все остальные.

Итак, считаем, что $x, y, z > 0$. Делим второе уравнение на первое, получаем $y^2 = 2x^2$, т.е. $y = \sqrt{2}x$. Делим третье уравнение на первое, получаем $z^2 = 3x^2$, т.е. $z = \sqrt{3}x$. Подставляя всё в первое, получаем

$$6\sqrt{6}x^9 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[6]{6}}, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}.$$

Итак, единственное положительное решение найдено. С учётом замечания про знаки получаем ещё 3 решения, т.е. всего 4 решения, указанных в ответе.

*Критерии.*

(−) нет решения

(−.) вывод одного из выше перечисленных соотношений

(−/+) вывод соотношений $x^2 = (y^2)/2 = (z^2)/3$

(+/2) решение с ошибками в знаках, приводящее к неверному ответу

(+/−) арифметические ошибки в решении

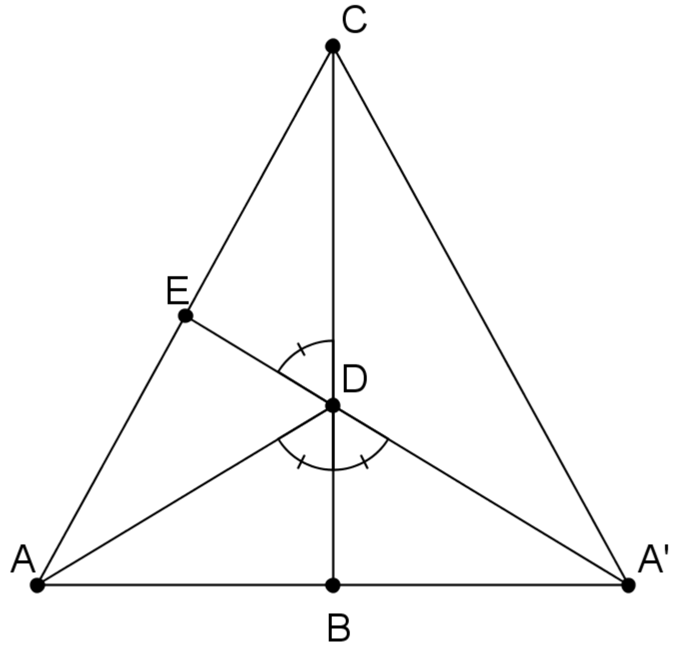
(+.) решение, в котором есть неверные утверждения со знаками, но в итоге ответ верный

(+) чистое решение

**2.** Дан треугольник $ABC$, $\angle B = 90°$. На сторонах $AC$, $BC$ выбраны точки $E$ и $D$ соответственно, такие, что $AE = EC$, $\angle ADB = \angle EDC$. Найти отношение $CD : BD$.

*Ответ.* $2 : 1$

*Решение.* Построим треугольник $A'BC$, симметричный данному относительно стороны $BC$. Точки $A', D, E$ лежат на одной прямой, т.к. $\angle A'DB = \angle EDC$. Следовательно $D$ — точка пересечения медиан $A'E$ и $CB$ треугольника $AA'C$, и делит их в отношении $2 : 1$ считая от вершины.




*Критерии.*

(−.) Рассмотрен частный случай, где получен правильный ответ, но в решении было получено, что в треугольнике угол равен 30. Либо в решении было получено подобие, где при нахождении коэффициента получался правильный ответ.

(−/+) Получен правильный ответ, но в решении не доказано, почему K=2 и отсутствуют подобия, в котором этот коэффициент мог быть найден.

(+/2) Получен правильный ответ, но в решении присутствуют соотношения, которые используются в решении, но не доказано почему.

(+/−) Получен правильный ответ, показано из какого подобия выходит нужный коэффициент подобия, но не сказано почему (т.е. из решения видно почему это так, но нет ссылки на это в доказательстве). Либо не получен ответ, но по решению видно, что можно получить нужный коэффициент, чтобы вывести правильный ответ, но почему-то это сделано не было.

(+.) Арифметическая ошибка при правильном решении, которая привела к неправильному ответу. Либо получен правильный ответ, но в решении встречаются ошибки в обозначениях, из-за которых решение становится не ясным.

**3.** В стране Лимпопо есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты ($\mathcal{E}$) и доллары (\$). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\text{Б} \underset{\frac{1}{2}}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{6}}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \text{Б} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{11}}{\overset{11}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{15}}{\overset{10}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{7}}{\overset{5}{\rightleftarrows}} \text{Б}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелки, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов а один кокос - на $1/15$ доллара. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь угодно мелкие части: например обменять $101/43$ енота на $606/43$ банана). Обмены $\$ \leftrightarrows \mathcal{E}$ в Лимпопо запрещены.

Перевозить деньги через границу Лимпопо можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лимпопо, имея при себе 100 долларов. Он может выполнять указанные выше операции обмена валют неограниченное количество раз, но не имеет никаких других источников дохода. Может ли он разбогатеть и увезти из Лимпопо 200 долларов? Если да — объясните, как. Если нет, докажите.

*Ответ.* Может.

*Решение.* Отметим, что в условии задачи не сказано явно, требуется ли получить не менее 200\$, или ровно 200\$. Ответ положительный для обеих трактовок условия. Хотя понятно, что решение для случая ”роно 200\$” решает так же и второй случай, мы приведём разные решения для обоих случаев, т.к. в работах участников достаточно часто встречались обе трактовки.

а) Нужно получить не менее 200\$.

Рассмотрим цикл К$\to$ $\mathcal{E}$ $\to$ Б $\to$ К. Если обменивать деньги по такому циклу, то количество денег увеличивается. Действительно, если было изначально $x$ кокосов, то они обмениваются на $\frac{x}{11}$ енотов, которые в свою очередь обмениваются на $\frac{6x}{11}$ бананов, которые обмениваются на $\frac{12x}{11}$ кокосов. Таким образом, из $x$ кокосов получается $\frac{12x}{11}$ кокосов.

Стратегия дяди Васи такова: вначале обменять 100 долларов на 1000 кокосов. Затем обменивать их по указанному выше циклу, пока не получится более 3000 кокосов. Для этого цикл придётся пройти $n$ раз, где $n$ таково, что $\left(\frac{12}{11}\right)^n > 3$. Поскольку $\frac{12}{11} > 1$, это неравенство равносильно неравенству $n > \log_{\frac{12}{11}} 3$. Очевидно, натуральное $n$, удовлетворяющее этому условию, существует.

Получившиеся в результате кокосы следует обменять на доллары, которых получится не менее $\frac{3000}{15} = 200$.

б) Нужно получить ровно 200\$. Рассмотрим тот же цикл, что в пункте а), но будем каждый раз запускать по обменному циклу ровно 11 кокосов, т.е. прибыльный 12-й кокос будем каждый раз откладывать. Тогда, сделав $n$ циклов, мы можем заработать ровно $n$ кокосов. Теперь стратегия например такова: обмениваем 100\$ на 1000 кокосов, берём 11 из этой 1000 и производим $n$ раз цикл, в результате получаем $1000+n$ кокосов. Если $n = 2000$, то в результате получим 3000 кокосов, которые обменяем обратно на 200\$.

*Критерии.*

(−/+) Найден цикл, который увеличивает капитал, и более не сделано никаких значимых продвижений.

(+/−) Приведён алгоритм, дающий экспоненциальный рост капитала, однако не приведено доказательство того, что этот алгоритм когда-либо достигнет нужной суммы, или приведено неверное доказательство, например, неограниченость капитала ”выведена“ из его возрастания.

(+) Задача полностью решена. В случае приведения алгоритма с линейным приростом капитала обоснования того, что нужная сумма будет достигнута, не требуется.

**4.** Даны три точки $A, B, C$, образующие треугольник с углами $30°, 45°, 105°$. Выбираются две из этих точек, и проводится серединный перпендикуляр к отрезку, их соединяющему, после чего третья точка отражается относительно этого серединного перпендикуляра. Получаем четвёртую точку $D$. С получившимся набором из 4 точек осуществляется та же процедура — выбираются две точки, проводится серединный перпендикуляр и все точки отражаются относительно него. Какое наибольшее количество *различных* точек можно получить в результате многократного повторения этой процедуры?

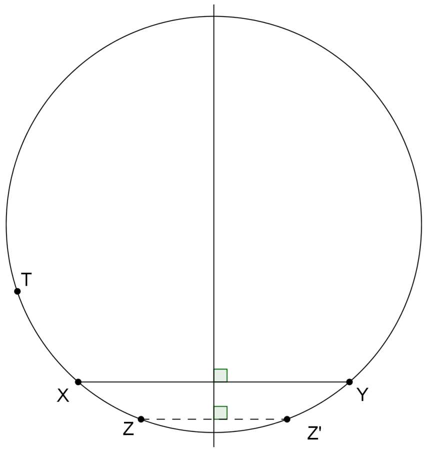
*Ответ.* 12 точек.

*Решение.* ПЕРВЫЙ СПОСОБ.

1. Пусть $XY$ – границы отрезка, к которому мы проводим срединный перпендикуляр; $Z$ – точка, которую отражаем; $Z'$ – образ $Z$. Тогда точка $Z'$ лежит на окружности, описанной около треугольника $XYZ$. Это следует из того, что серединный перпендикуляр к любой хорде проходит через центр окружности и, следовательно, является её осью симметрии. Отсюда следует, что все новые получающиеся точки будут лежать на одной окружности.

2. Докажем, что если достигнуто максимальное количество точек, то все они являются вершинами правильного многоугольника. Как доказано выше, все они лежат на одной окружности. Выберем какую-то из получившихся точек, назовем ее первой, а остальные занумеруем против часовой стрелки. Выберем три последовательные точки $A_{i-1}, A_i$ и $A_{i+1}$ и проведем срединный перпендикуляр к отрезку $A_{i-1}A_{i+1}$. Если он не проходит через $A_i$, то при отражении точки $A_i$ относительно него получилась бы еще одна точка на дуге $A_{i-1}A_{i+1}$, что противоречит максимальности. Значит $A_i$ лежит на этом серединном перпендикуляре, а потому отрезки $A_iA_{i+1}$ и $A_iA_{i-1}$ равны. Таким образом, все точки образуют вписанный многоугольник с равными сторонами, т.е. правильный многоугольник.

3. Докажем, что градусная мера дуги между двумя соседними точками не может быть меньше $30°$. Пусть отражаем точку $Z$ относительно срединного перпендикуляра к $XY$, точки $Z$ и $X$ лежат в одной полуплоскости относительно перпендикуляра, а образ $Z$ при отражении – точка $Z'$ (см. рисунок ниже). Тогда дуга $\overset{\smile}{Z'Y}$ равна дуге $\overset{\smile}{ZX}$. Пусть далее $T$ — произвольная точка на окружности. Тогда для дуги $\overset{\smile}{TZ'}$ имеет место равенство $\overset{\smile}{TZ'} = \pm \overset{\smile}{TY} \pm \overset{\smile}{XZ}$ (знаки выбираются в зависимости от расположения точек и способа измерения дуг, на рисунке ниже рассмотрен один из случаев).Тогда градусная величина дуги $\overset{\smile}{TZ'}$ кратна наибольшему общему делителю дуг $\overset{\smile}{TY}$ и $\overset{\smile}{XZ}$, т.е. НОД градусных величин всех дуг при такой операции остаётся неизменным. Изначально точки $A$, $B$, $C$ разбивают окружность на дуги, градусные меры которых равны $60°,\ 90°,\ 210°$. Соответственно, наибольший общий делитель равен $30°$, а значит градусные мер всех получаемых дуг будут кратны $30°$ и не смогут быть меньше $30°$.




$\breve{TZ'} = \breve{AY} - \breve{XZ}$

4. Будем теперь выполнять указанную в задаче операцию до тех пор, пока можно получить хотя бы одну новую точку. Из доказанного выше п.3 следует, что это не может продолжаться бесконечно: все дуги с концами в получающихся точках кратны $30°$, поэтому общее количество точек будет не больше 12. В то же время из п.2 следует, что когда будет достигнут максимум, точки будут образовывать правильный многоугольник, причём величина дуги между соседними его вершинами будет наибольшим общим делителем всех остальных дуг, т.е. будет равна $30°$. А значит точек будет ровно $360/30 = 12$.

ВТОРОЙ СПОСОБ

Точки, получающиеся в результате отражений, а так же точки $A, B, C$, данные изначально, будем называть отмеченными.

Рассмотрим правильный 12-угольник $A_1A_2\dots A_{12}$. Углы треугольника $A_1A_3A_6$ равны $30°,\ 45°,\ 105°$, т.е. можно считать, что изначально отмечены точки $A_1, A_3, A_6$. Докажем, что все отмеченные точки будут вершинами данного 12-угольника. Доказываем индукцией по количеству отражений. Изначально это верно. Пусть это верно после $n-1$ отражений. Тогда отражение с номером $n$ выполняется относительно серединного перпендикуляра к какому-то из отрезков $A_iA_j$. Но любой такой серединный перпендикуляр является осью симметрии 12-угольника, и значит все его вершины перейдут снова в вершины. Т.е. новые отмеченные точки снова будут вершинами многоугольника. Утверждение доказано.

Итак, никаких других отмеченных точек кроме вершин 12-гольника не будет. Теперь покажем, что все 12 вершин можно сделать отмеченными. Это можно сделать разными способами.

Будем использовать запись $(A_iA_j) \to A_k, A_l, \dots$, которая означает, что в результате отражения относительно серединного перпендикуляра к отрезу $A_iA_j$ появятся новые отмеченные точки $A_k, A_l$...

Изначально отмечены $A_1, A_3, A_6$.

$(A_1A_6) \to A_4$
$(A_1A_3) \to A_{10}, A_{12}$
$(A_1A_4) \to A_2, A_5, A_{11}, A_7$
$(A_6A_7) \to A_8, A_9$.

Теперь отмечены все 12 вершин.

*Критерии.* В полном решении должны быть явно прописаны две части: 1) доказательство того, что больше 12 точек получить невозможно, и 2) доказательство того, что ровно 12 точек можно получить.

Если присутствует только один из этих двух пунктов, решение оценивается как неполное.

(−) Правильный ответ, полученный с помощью неверных или никак не обоснованных действий (например деление угла $360°$ на наименьший угол треугольника).

(−.) Разумные рассуждения в решении. Например: утверждается, что максимум достигается, когда точки образуют правильный многоугольник.

(−/+) Доказано, что все точки лежат на одной окружности.

(+/2) построен пример (либо задана последовательность отражений, либо нарисован 12-угольник и показано расположение изначального треугольника + объяснено, как получить соседние тоочки),

(+/−) построен пример + есть доказательство максимальности с серьезными недочетами

*или*

есть чистое (или с незнаительными недочетами) доказательство максимальности, но не построен пример.

(+.) Мелкие недочёты при в целом правильном решении.

(+) Правильное решение без недочётов, содержащее ответ и все необходимые шаги доказательства.

**5.** Приведите пример функции $f(x)$, для которой выполняются все три перечисленных ниже условия:

- область определения функции $f(x)$ — множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$,
- при любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = b$ имеет ровно одно решение,
- при любом $a > 0$ и любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = ax + b$ имеет не менее двух решений.

*Ответ.* $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Замечание: это простейший пример, но возможны и другие ответы. В работах участников олимпиады встречались довольно сложные примеры непрерывных функций, удовлетворяющих всем условиям задачи.

*Решение.* Проверим выполнение условий.

- Прямо из определения следует, что функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$.
- Если $b \neq 0$, то при $x \neq 0$ уравнение $f(x) = b$ имеет единственное решение $x = \frac{1}{b}$, а $x = 0$ решением не является. Т.е. имеем ровно одно решение.

  Если $b = 0$, то при $x \neq 0$ уравнение $f(x) = 0$ не имеет решений, а $x = 0$ решением является. Т.е. в этом случае тоже ровно одно решение.
- Если $a > 0$, то уравнение $f(x) = ax + b$ имеет два ненулевых решения. Действительно, при $x \neq 0$ уравнение запишется в виде $\frac{1}{x} = ax + b \Leftrightarrow ax^2 + bx - 1 = 0$. Дискриминант здесь строго положителен, поэтому уравнение имеет два корня, и они оба не равны 0, т.е. оба являются корнями исходного уравнения. Поскольку ненулевых решений ровно два, то всего решений не менее двух. (Отметим, что при $b = 0$ уравнение имеет три решения, т.к. $x = 0$ также является решением.)

*Критерии.* «Стандартным примером» называем функцию $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(−) Неверный ответ или отсутствие ответа.

(−.) В качестве ответа приведена функция $f(x) = 1/x$ без доопределения в нуле или с неправильным доопределением, и без доказательства того, что уравнение $1/x = ax + b$ при $a > 0$ имеет два решения.

(−/+) Стандартный пример (или похожий) задан графиком, с явно добавленной изолированной точкой, символизирующей значение в нуле, но без формул,

*или*

приведён ответ $f(x) = 1/x$ без доопределения в нуле, но с доказательством того, что уравнение $1/x = ax + b$ при $a > 0$ имеет два решения.

(+/2) Построен правильный пример (формулой или алгоритмом построения) без обоснования или с неверным обоснованием (например, обоснование каждого свойства заменено его переформулировкой).

(+/−) Правильный пример с четким и полным обоснованием второго свойства, но без правильного обоснования третьего свойства.

*или*

Обоснование третьего свойства опирается на строго не обоснованное утверждение, что график линейной функции с положительным угловым коэффициентом имеет пересечение с графиком $1/x$ как в первой, так и в третьей четверти (если есть обоснование со ссылкой на непрерывность и теорему о промежуточном значении, то это является строгим доказательством и оценивается выше).

*или*

Имеется много (больше двух) мелких дефектов, типа тех, что перечислены в критерии для (+.).

(+.) Пример строится в виде кусочно-линейной функции; обоснование основывается на том, что отрезок или ломанная, соединяющая две точки, лежащие по разные стороны от прямой, пересекает эту прямую (доказательство этого факта не требуется); но это обоснование содержит незначительные пробелы (например, отсутствует аккуратное объяснение того, что построенная ломанная уходит на бесконечность как по $x$, так и по $y$).

*или*

Предъявлен стандартный пример, но в доказательстве имеется не более двух мелких дефектов, к примеру таких:

1. Имеется неверное утверждение, от которого решение в действительности не зависит (то есть можно вычеркнуть несколько строк, содержащих неверное утверждение, и останется правильное и полное доказательство).
2. Нет полного обоснования того, что при любом $b$ уравнение $f(x) = b$ имеет единственное решение (например, обоснование подменено переформулировкой типа ”функция задает взаимно-однозначное отображение $\mathbb{R}$ на себя” или ”график функции имеет единственную точку пересечения с каждой горизонтальной прямой”).
3. При доказательстве третьего условия доказано, что дискриминант получающегося квадратного уравнения положителен, но не объяснено, что корни его ненулевые, и тем самым действительно дают два решения уравнения $1/x = ax + b$.

(+) Предъявлен правильный пример функции с полным доказательством выполнения всех трех условий.

**6.** а) Найти хотя бы два различных натуральных числа $n$, для каждого из которых число $n^2 + 2015n$ является точным квадратом натурального числа.
б) Найти *количество всех* натуральных чисел $n$, для каждого из которых число $n^2 + 2015n$ является точным квадратом натурального числа.

*Ответ.* а) Например $n = 496$ и $n = 1007^2 = 1014049$. б) 13.

*Решение.* <u>ПЕРВЫЙ СПОСОБ.</u>

Пусть $n^2 + 2015n = m^2$. Обозначим $d =$НОД$(n, 2015)$, $n = d\nu,\ 2015 = dr$. Тогда $\nu$ и $r$ взаимно просты, и

$$d^2\nu(\nu + r) = m^2.$$

Поскольку $\nu$ и $\nu + r$ взаимно просты, каждое из них должно быть квадратом натурального числа, т.е. $\nu = a^2,\ \nu + r = b^2$. Тогда $r = (b - a)(b + a)$.

а) Получить какие-нибудь значения $n$ можно, выбирая $d, a, b$ по указанной выше схеме. Число $d$ является делителем числа $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Например выберем $d = 1$. Тогда $r = 2015 = (b-a)(b+a)$. Пусть $b-a = 1,\ b+a = 2015$. Тогда $b = 1008,\ a = 1007$, и получаем первое значение $n = a^2d = 1007^2$.

Возьмём теперь $d = 31$. Тогда $r = 65 = (b - a)(b + a)$. Пусть $b - a = 5,\ b + a = 13$. Тогда $b = 9,\ a = 4,\ n = a^2d = 496$.

б) Из приведённого выше рассуждения следует, что такая схема даёт все решения. При этом, поскольку $d$ не делится на квадрат простого числа, разным $d, a$ будут соответствовать разные $n$. Посчитаем, сколько всего разных $n$ можно получить. Число $d$ является делителем числа $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Рассмотрим 4 случая:

- $d = 1$. Тогда $r = 2015 = (b - a)(b + a)$. Число 2015 имеет 8 различных делителей, и значит 4-мя способами может быть представлено в виде $2015 = (b - a)(b + a)$. (Учитывая, что $b-a < b+a$). Для каждого такого разложения оба числа $b-a,\ b+a$ нечётные, а значит однозначно восстанавливаются $a, b$. Зная $a, b, d$, однозначно находим $n = d \cdot a^2$. Т.е. в этом случае имеем 4 различных числа $n$.

- $d = 5$, 13 или 31. Тогда $r$ является произведением двух простых чисел и может быть разложено в виде $r = (b - a)(b + a)$ двумя способами. Т.е. всего $3 \cdot 2 = 6$ ответов.

- $d = 65$, 155 или 403. Тогда $r$ простое число, и может быть разложено в виде $r = (b - a)(b + a)$ единственным способом. Т.е. ещё 3 ответа.

- $d = 2015$. Тогда $r = 1$, и равенство $r = (b - a)(b + a)$ невозможно, т.к. $a, b$ — натуральные числа.

Итого 4+6+3=13 различных чисел $n$.

<u>ВТОРОЙ СПОСОБ.</u>

Пусть $n^2 + 2015n = m^2$. Умножая на 4 и дополняя до полного квадрата левую часть, преобразуем равенство к виду

$$(2n + 2015)^2 = 4m^2 + 2015^2 \Rightarrow (2n - 4m + 2015)(2n + 4m + 2015) = 2015^2.$$

Обозначая $2n-4m+2015=a,\ 2n+4m+2015=b$, получаем, что все искомые значения $n$ определяются из условий

$$a<b,\ ab=2015^2,\quad n=\frac{a+b-2\cdot 2015}{4}.$$

а) Получить несколько конкретных значений $n$ можно, беря конкретные разложения $ab=2015^2=5^2\cdot 13^2\cdot 31^2$. Например если $a=1,\ b=2015^2$, то $n=4060226$. Если $a=25\cdot 31,\ b=169\cdot 31$, то $n=496$.

б) Заметим, что для любого разложения $2015^2=ab$ число $n$, определяемое равенством $n=\frac{a+b-2\cdot 2015}{4}$, целое. Это следует из того, что $ab=2015^2\equiv 1(\mod 4)$, поэтому либо $a\equiv b\equiv 1(\mod 4)$ либо $a\equiv b\equiv 3(\mod 4)$. В обоих случаях $a+b\equiv 2\equiv 2\cdot 2015(\mod 4)$. Таким образом, количество искомых чисел $n$ равно количеству разложений $ab=2015^2,\ a<b$. Всего у числа $2015^2$ ровно 27 различных делителей. Один из них равен 2015, а остальные собираются в пары $(a,b),\ a<b,\ ab=2015^2$. Следовательно количество таких пар равно $\frac{27-1}{2}=13$.

*Критерии.*

(−)

(−.) Одно значение в пункте а)

(−/+) Правильно решённый пункт а)

(+/2) или (+/−) Пункт а) и продвижения в пункте б) (в зависимоти от продвижений)

(+/−)

(+.)

(+) чистое решение